

〔1〕 以下に答えだけを書け。

(1) $\left(z = 2 - 5i \right) \left(w = 1 + 12i \right)$

(2) $\left(x = 0 \text{ のとき最大値 } f(x) = 8 \right) \left(x = \pm\sqrt{3} \text{ のとき最小値 } f(x) = -3 \right)$

(3) $\left(\frac{1}{2} \sqrt{17} \right)$

(4) $\left(\frac{5120}{19683} \right)$

(5) $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi \right)$

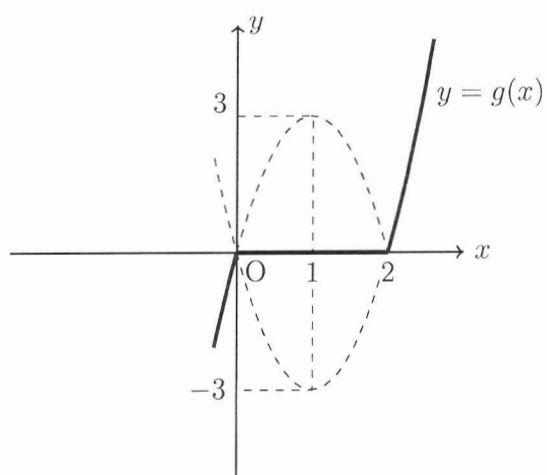
(6) $\left(\frac{2025}{4051} \right)$

(7) $\left(a = \frac{9}{2} \right) \left(b = 3 \right) \left(c = \frac{3}{2} \right)$

(8) $\left(y = ex \right)$

(9) $\left(\frac{1344}{65} \right)$

(10)



$$g(x) = \begin{cases} 3x(2-x) & (x < 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (0 \leq x \leq 2 \text{ のとき}) \\ 3x(x-2) & (x > 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

計

点

合計

点

(2 枚のうちの 2)

〔2〕 解答と解答に至るまでの導出過程を記述せよ。

$$(1) \quad f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0, 1$$

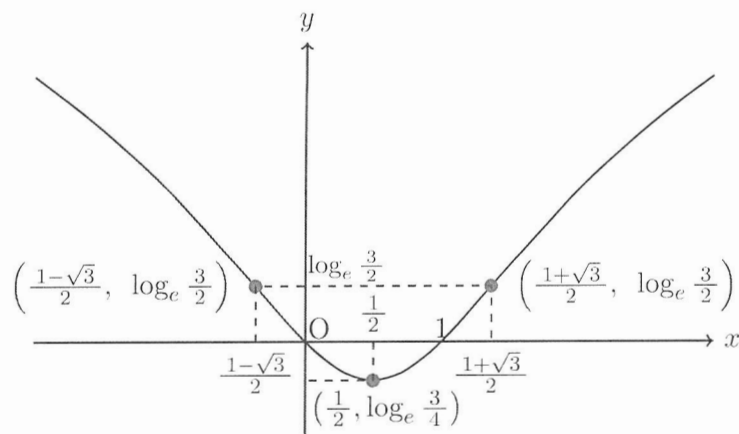
$$(2) \quad \begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x-1}{x^2-x+1} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \\ f''(x) &= \frac{-2x^2+2x+1}{(x^2-x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

であるから、 $f(x)$ の増減表は

x	...	$\frac{1-\sqrt{3}}{2}$	...	$\frac{1}{2}$	...	$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$	...
$f'(x)$	-	-	-	0	+	+	+
$f''(x)$	-	0	+	+	+	0	-
$f(x)$		↘	変曲点	↘	極小	↗	変曲点

となり、 極小値 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \log_e \frac{3}{4}$,
変曲点 $\left(\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}, \log_e \frac{3}{2}\right)$ がわかる。

グラフの概形は下記の通りになる。



$f(x) = \log_e \left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \right)$ だから、
グラフは 直線 $x = \frac{1}{2}$ について線対称である。

(3) 部分積分法より、

$$\begin{aligned} S &= - \int_0^1 \log_e(x^2 - x + 1) dx \\ &= - \int_0^1 (x)' \log_e(x^2 - x + 1) dx \\ &= - [x \log_e(x^2 - x + 1)]_0^1 + \int_0^1 x \cdot \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx \\ &= \int_0^1 \left(2 + \frac{\frac{1}{2}(x^2-x+1)'}{x^2-x+1} - \frac{\frac{3}{2}}{(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \right) dx \\ &= 2 + \frac{1}{2} [\log_e(x^2 - x + 1)]_0^1 - \int_0^1 \frac{2}{\frac{4}{3}(x-\frac{1}{2})^2 + 1} dx \end{aligned}$$

$\tan \theta = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(x - \frac{1}{2}\right)$ による置換積分を考えると

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta = \frac{2}{\sqrt{3}} dx, \quad \begin{array}{ccc|ccc} x & 0 & \rightarrow & 1 & & \\ \theta & -\frac{\pi}{6} & \rightarrow & \frac{\pi}{6} & & \end{array}$$

であるから、

$$\begin{aligned} S &= 2 - \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{2}{\tan^2 \theta + 1} \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= 2 - \sqrt{3} \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} d\theta = 2 - \frac{\sqrt{3}}{3} \pi \end{aligned}$$